EXTENSIONS COMPLETES D'UNE THEORIE FORCING COMPLETE

PAR

MAURICE POUZET

ABSTRACT

We give two examples of a universal theory T such that the forcing companion T^F (as defined by A. Robinson for infinite forcing) has some model which is not the elementary equivalent of a generic model of T. Our examples answer in a negative way a question posed by E. Fisher and A. Robinson. In the first example, for T^F, there is an extension T' which is complete and forcing comcomplete (that is, $(T')^F = T'$) not generated by a generic model of T. In the second example T^F has a complete extension T' which is not forcing complete.

1. Introduction

Le *forcing infini* de A. Robinson associe à toute théorie T une certaine classe de structures dites *structures génériques* de T; la théorie T^F de ces génériques est appelée le *forcing compagnon* de T; lorsque $T = T^F$ la théorie T est dite *forcing complète.* Etant donnée une théorie universelle T (théorie engendrée par des énoncés universels), ses *composants* sont définis comme les plus petites extensions universelles T_i de T pour lesquelles deux modèles de T_i s'immergent dans un modèle de T_i.

E. Fisher et A. Robinson montrent dans [1, Th. 3.9, p. 105] que les génériques de T sont les génériques de composants de T, et posent la question suivante: *Est-ce que toute extension complète de T^F est extension d'un T_i^F?* Les T_i^F étant complètes ceci revient donc à se demander si tout modèle de T^F est élémentairement équivalent à une générique de T.

A l'origine le but de cet article était seulement d'exposer un exemple répondant négativement à cette question; le referee nous a signalé que celle-ci conduisait alors aux deux problèmes suivants:

Received January 1, 1973 and in revised form April 15, 1973

(i). *Est-ce que toute extension complète et forcing complète de T^F est extension complète d'un T_i^F?*

(ii). *Est-ce que toute extension complète d'une théorie forcing complète est encore forcing complète?*

Dans ce qui suit nous exposons l'exemple primitif qui, comme nous l'a signalé le referee, répond aussi par la négative au premier problème mais laisse le second ouvert. Enfin nous donnons un exemple répondant aussi par la négative au deuxième problème. Nous remercions le referee pour ses commentaires et suggestions.

2. Premier exemple

Appelons *cycle de longueur n* la relation binaire C_n sur l'ensemble des n premiers entiers $0, 1, \cdots, n-1$ définie par: $(x, y) \in C_n$ lorsque $y \equiv x + 1$ modulo n. Appelons *consécutivité* la relation binaire C sur l'ensemble Z des entiers relatifs définie par: $(x, y) \in C$ lorsque $y = x + 1$. Enfin désignons par C^0 la relation binaire sur l'ensemble des entiers positifs définie par: $(x, y) \in C^0$ lorsque $y = x + 1$ ou $x = y = 0$.

Dans le langage ne comportant qu'un prédicat binaire considérons la théorie T_1 engendrée par les énoncés universels vrais à la fois dans C^0 et dans les cycles C_n (pour $n \geqq 3$).

On voit aisément que les modèles de T_1 sont exactement les cycles C_n ($n \geqq 3$) et les relations binaires R pour lesquelles chaque restriction finie de R est isomorphe à une restriction de C^0 (en particulier C est un modèle de T_1). Les composants de T_1 sont donc les théories universelles associées aux C_n et la théorie universelle associée à C^0. Les théories complètes associées aux C_n et la théorie complète de C^0 étant modèle complètes elles sont les forcing compagnons des composants de T_1. (Remarque: une théorie est *modèle complète* lorsque toute immersion d'un modèle vers un autre est une immersion élémentaire.) Par conséquent les génériques de T_1 sont les cycles C_n (pour $n \geqq 3$) et les relations binaires élémentairement équivalentes à C^0.

Considérons maintenant la théorie dont les axiomes expriment: (i) que tout élément x a exactement un successeur et un prédécesseur distincts entre eux et distincts de x, et (ii) que si n éléments forment un cycle, alors il y a au plus n éléments. On voit facilement que les modèles finis de cette théorie sont les cycles C_n (pour $n \geqq 3$) et que les modèles infinis sont élémentairement équivalents à C. Par le théorème de compacité on en déduit que cette théorie coïncide avec la théorie de l'ensemble des C_n (pour $n \geqq 3$).

Puisque ces derniers sont génériques, la théorie complète T_1' de C est une extension complète de T_1^F; étant en outre modèle complète T_1' est forcing complète alors que C n'est pas générique pour T_1. Ceci répond donc à la fois à la question de E. Fisher et A. Robinson et au premier problème.

3. Deuxième example

Etant données la relation binaire R sur l'ensemble E et la chaîne, ou ordre, total S sur l'ensemble F, appelons *produit ordinal* de R par S et désignons par $R.S$ la relation binaire sur l'ensemble $E \times F$ formée des couples $((x,y),(x',y))$ pour lesquels $(x,x') \in R$ et des couples $((x,y),(x',y'))$ pour lesquels $(y,y') \in S$ et $y \neq y'$. Dans ce qui suit nous identifierons chaque entier n avec la chaîne des entiers qui lui sont strictement inférieurs; nous désignerons par $\mathbb{N} + \mathbb{N}^-$ la chaîne discrète formée de la chaîne des entiers suivie de la chaîne des entiers négatifs; enfin nous désignerons par Q la chaîne dense des nombres rationnels.

Dans le langage ne comportant qu'un prédicat binaire considérons la théorie T_2 engendrée par les énoncés universels vrais dans tous les $C_n \cdot n$ pour $n \geqq 3$ (le cycle C_n a été défini en Section 2).

Puisque les $C_n \cdot n$ sont finis et $C_n \cdot n$ ne s'immerge pas dans $C_{n'} \cdot n'$ pour $n \neq n'$, il s'ensuit que pour chaque n la théorie universelle de $C_n \cdot n$ est un composant de T_2. Par conséquent les $C_n \cdot n$ sont des génériques de T_2 et la théorie de l'ensemble des $C_n \cdot n$ est une extension de T_2^F.

Montrons rapidement que *la théorie de l'ensemble des $C_n \cdot n$ a pour modèles les $C_n \cdot n$ et les relations binaires élémentairement équivalentes à $C \cdot (\mathbb{N} + \mathbb{N}^-)$*. La classe des relations binaires étant munie de la topologie dont les ouverts sont les réunions de classes élémentaires (classe des modèles d'un énoncé) on montre que l'opérateur produit ordinal qui a un couple (R,S) associe $R.S$ est continu. (On utilise, par exemple, la notion de (k,p) équivalence de R. Fraïssé [2] pour montrer que si R et R' sont (k,p) équivalents, S et S' sont (k,p) équivalents, alors $R.S$ et $R'.S'$ sont (k,p) equivalents.) Par ailleurs on sait que l'adhérence de l'ensemble des C_n est obtenue en ajoutant les relations élémentairement équivalentes à C et l'adhérence de l'ensembles des n en ajoutant les chaînes élémentairement équivalentes à $\mathbb{N} + \mathbb{N}^-$ (chaînes discrètes infinies avec premier et dernier élément). Du théorème de compacité et de la continuité de l'opérateur produit ordinal il s'ensuit que l'adhérence de l'ensemble des $C_n \cdot n$ est obtenue en ajoutant les relations élémentairement équivalentes à $C \cdot (\mathbb{N} + \mathbb{N}^-) \cdot$ CQFD.

La théorie complète T_2' de $C \cdot (\mathbb{N} + \mathbb{N}^-)$ est donc une extension complète de T_2^F. Maintenant en utilisant le fait que Th(C) et Th(Q) sont modèle-complètes on peut voir que Th($C \cdot Q$) est modèle-complète; cette théorie est donc le forcing compagnon de T_2'.

La théorie T_2' n'ayant pas $C \cdot Q$ pour modèle n'est pas forcing complète et donc répond au deuxiéme problème.

De ce qui précède il résulte que les composants de T_2 sont les théories universelles associées aux $C_n \cdot n$ et à $C \cdot (\mathbb{N} + \mathbb{N}^-)$ et que les génériques de T_2 sont les $C_n \cdot n$ et les modèles élémentairement équivalents à $C \cdot Q$.

4. Comparaison avec le forcing fini de Robinson

Pour le forcing fini les deux exemples donnent aussi des réponses négatives aux problèmes précédents.

La théorie T_1 a les mêmes génériques pour le forcing fini et le forcing infini (remarquer que les C_n et les relations binaires élémentairement équivalentes à C^0 sont les seuls modèles complétifs de T_1^F). La théorie T_1' étant modèle complète est encore forcing complète pour le forcing fini sans être extension d'un générique de T_1.

Pour T_2 la situation est légèrement différente. Les C_n étant les modèles complétifs de la théorie des C_n, cette théorie est forcing complète pour le forcing fini et a pour génériques les seuls C_n. Néanmoins T_2' est encore une extension complète non forcing complète de cette théorie.

Cet exemple montre en outre que contrairement au forcing infini une théorie T peut avoir des modèles infinis sans génériques infinies (pour le forcing fini) et donc que les génériques d'un composant de T ne sont pas forcément génériques pour T.

References

1. E. Fisher et A. Robinson, *Inductive theories and their forcing companions*, Israel J. Math. **12** (1972) 95–107.

2. R. Fraïssé, *Cours de logique mathématique*, *Théorie des Modèles*, Tome 2, Gauthier-Villars, Paris, 1972.

Departement de Mathematiques
Universite Claude Bernard
Villeurbanne, France